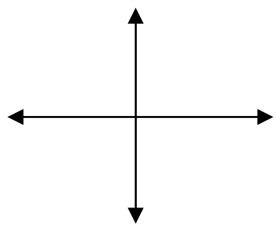
Bezeichnungsprobleme in der Schulmathematik

GÜNTHER MALLE, WIEN

In den Schulbüchern und im Mathematikunterricht werden unterschiedliche Bezeichnungen und Sprechweisen verwendet. Die Einführung der zentralen Reifeprüfung hat jedoch Entscheidungen hinsichtlich einer einheitlichen Formulierung der Maturaaufgaben erfordert. Das BIFIE hat darauf mit der Durchführung des Projekts „Zeichen und Wunder“ (unter der Leitung von A. Univ. Prof. Dr. Jürgen Maaß) reagiert, in dem die für die zentrale Reifeprüfung vorgesehenen Bezeichnungen und Sprechweisen festgelegt werden sollten. Derzeit liegt dazu ein vorläufiger Projektbericht vor. Dieses Projekt hat bewirkt, dass eine etwas breitere Diskussion über die Rolle von Bezeichnungen und Sprechweisen in der Schulmathematik in Gang gekommen ist. Im Folgenden behandle ich aus meiner Sicht – unabhängig von diesem Projekt – eine kleine Auswahl von Themen, in denen solche Bezeichnungsprobleme auftreten.

1. Darstellung der Koordinatenachsen

Gelegentlich werden die Achsen eines Koordinatensystems wie in der nebenstehenden Abbildung nach beiden Richtungen hin mit Pfeilspitzen versehen. Damit soll offensichtlich angedeutet werden, dass die Achsen nach beiden Richtungen bis „ins Unendliche“ verlängert werden können. Diese Auffassung der Pfeilspitzen kann man nicht als falsch bezeichnen, sie entspricht aber nicht dem sonst in der Mathematik Üblichen. Jede Achse eines Koordinatensystems ist eine Zahlengerade und auf dieser muss eine Ordnung festgelegt werden. Dabei muss insbesondere kenntlich gemacht werden, in welche der beiden möglichen Richtungen die Zahlen größer werden. Das geschieht durch Anbringen von nur einer (!) Pfeilspitze.



Die obige Darstellung leistet übrigens einem wohlbekannten Schülerfehler Vorschub. Viele Schülerinnen und Schüler ordnen die ganzen Zahlen nämlich zunächst spiegelbildlich zum Nullpunkt an. Für sie werden die Zahlen auf einer Zahlengeraden vom Nullpunkt aus sowohl nach rechts als auch nach links größer. Demgemäß ist zwar $3 < 5$, aber auch $-3 < -5$ (3 Euro Schulden sind weniger Schulden als 5 Euro). Man weiß aus verschiedenen empirischen Untersuchungen (siehe Malle 2007 a, b), dass diese Fehlvorstellung weit verbreitet ist und den Lernenden oft nur mit Mühe ausgetrieben werden kann. Die Darstellung mit zwei Pfeilspitzen unterstützt leider diese Fehlvorstellung.

2. Koordinaten- und Achsenbezeichnungen

Es hat sich seit Generationen eingebürgert, die Koordinaten eines Zahlenpaares als x-Koordinate und y-Koordinate zu bezeichnen sowie die Achsen eines dazugehörigen zweidimensionalen Koordinatensystems als x-Achse und y-Achse zu bezeichnen und mit x und y zu beschriften. Aber ist das immer zweckmäßig? In Anwendungen werden die Achsen oft mit anderen Buchstaben bezeichnet, z.B. bei einer Zeit-Ort-Funktion mit t und s. In diesem Fall wäre es angemessener, von der t-Koordinate und der s-Koordinate zu sprechen und die Achsen mit t und s zu beschriften. Unsinnig wäre es jedenfalls zu sagen: “Jetzt tragen wir auf der x-Achse die Zeit t und auf der y-Achse den zurückgelegten Weg s auf“. Denn damit hätte man das Kunststück geschafft, vier Variable einzuführen, obwohl zwei genügt hätten.

Mein Vorschlag:

- Die Achsen sollten nur dann mit *x* und *y* bezeichnet werden, wenn die betrachteten Größen tatsächlich *x* und *y* heißen. In diesem Fall ergibt es auch einen Sinn, von der *x*-Koordinate und der *y*-Koordinate zu sprechen. Dies ist zum Beispiel in der analytischen Geometrie bei der Darstellung von Kurven (Geraden, Kreisen, Ellipsen, Hyperbeln usw.) der Fall.
- Werden die betrachteten Größen ausdrücklich mit anderen Buchstaben bezeichnet (z.B. *t* und *s* bei Zeit-Ort-Funktionen), dann sollten auch die Achsen mit diesen Buchstaben bezeichnet werden. In diesem Fall hätte es keinen Sinn, von der *x*-Koordinate und der *y*-Koordinate zu sprechen. Im Falle einer Zeit-Ort-Funktion wäre es angemessener, von der *t*-Koordinate und *s*-Koordinate zu sprechen.
- Gibt es gute Gründe, die Achsenbezeichnungen nicht auf bestimmte Buchstaben festzulegen, wären die Bezeichnungen „1. Achse“ und „2. Achse“ geeigneter (das sind neutrale Sammelnamen für unterschiedliche Anwendungen). Auch in diesem Fall wäre es nicht sinnvoll, von der *x*-Koordinate und der *y*-Koordinate zu sprechen, weil es sich hier geradezu anbietet, von der ersten und der zweiten Koordinate zu sprechen.

Wenn ein Computer verwendet wird, ergibt sich natürlich das Problem, dass in einzelnen Computerprogrammen die Achsen verschieden bezeichnet werden. In den meisten Fällen sind die Bezeichnungen *x* und *y* voreingestellt. Gängige Programme (wie z.B. GeoGebra) erlauben aber, die Achsenbeschriftungen ohne großen Aufwand zu ändern und der jeweiligen Situation anzupassen. Man sollte dies nach Möglichkeit auch tun.

3. Punktkoordinaten

Punkte kann man mit oder ohne Gleichheitszeichen angeben, z.B. $P = (3|1)$ oder $P(3|1)$. Beide Schreibweisen sind korrekt, aber aus einem didaktischen Blickwinkel betrachtet ist die erste Schreibweise vorzuziehen. Dies liegt an dem Vektorkonzept, das sich mehr oder weniger in allen österreichischen Lehrbüchern durchgesetzt hat und auch mit der Grundkompetenzliste des BIFIE kompatibel ist (siehe die Grundkompetenzen AG 3.1 bis AG 3.3). Eine ausführliche Erläuterung dieses Konzepts findet man in Malle 2008, hier soll nur ein Gesichtspunkt hervorgehoben werden. Ein wesentlicher Gedanke dieses Vektorkonzepts besteht darin, dass Vektoren in $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ als Zahlenpaare bzw. Zahlentripel aufgefasst werden und dass die Zahlenpaare bzw. Zahlentripel sowie deren Rechenoperationen geometrisch gedeutet werden. Dementsprechend wird eine Parameterdarstellung einer Geraden in $\mathbb{R}^2$ als Gleichung zwischen Zahlenpaaren aufgefasst und so geschrieben: $X = (1|2) + t \cdot (3|4)$. Dabei werden die Zahlenpaare X und $(1|2)$ geometrisch als Punkte gedeutet und das Zahlenpaar $(3|4)$ wird als Pfeil gedeutet. Setzt man etwa $t = 5$, erhält man $X = (1|2) + 5 \cdot (3|4) = (1|2) + (15|20) = (16|22)$. Wegen der Transitivität der Gleichheit folgt daraus $X = (16|22)$. Es besteht keinerlei Veranlassung, dies in $X(16|22)$, also ohne Gleichheitszeichen, umzuschreiben. Aus Gründen der Einheitlichkeit sollten damit Punkte nicht erst im Ergebnis, sondern schon in der Angabe mit Gleichheitszeichen angeschrieben werden.

Selbst wenn man sich für die Angabe von Punkten mit Gleichheitszeichen entscheidet, gibt es noch mehrere mögliche Schreibweisen, vor allem: $P = (p_1 \mid p_2)$ oder $P = (x_p \mid y_p)$. Hier gibt es aus meiner Sicht eine klare Präferenz für die erste Schreibweise und zwar aus folgenden Gründen:

- Die Schreibweise $P = (x_p \mid y_p)$ beruht auf der Festlegung, die Koordinaten immer als *x*-Koordinate und *y*-Koordinate zu bezeichnen, was nicht immer sinnvoll ist, wie vorhin ausgeführt wurde.

–

- Die Schreibweise $P=(p_1|p_2)$ ist auf beliebig viele Koordinaten ausdehnbar. Diese Verallgemeinerung ist in der Vektorrechnung unumgänglich, da (laut Lehrplan und auch für die zentrale Reifeprüfung) Vektoren mit mehr als drei Koordinaten behandelt werden müssen. Die Schreibweise $P=(x_p|y_p)$ könnte man noch auf $P=(x_p|y_p|z_p)$ ausdehnen, aber ab vier Koordinaten würden einem die Buchstaben ausgehen.
- Manchmal wird im algebraischen Teil der Vektorrechnung die Schreibweise $P=(p_1|p_2|....|p_n)$ verwendet, weil es anders gar nicht möglich ist. In der anschließenden analytischen Geometrie wird dann aber zu $P=(x_p|y_p)$ bzw. $P=(x_p|y_p|z_p)$ übergegangen. Dies bedeutet eine Inkonsistenz im didaktischen Aufbau (einen didaktischen Bruch). Solche Inkonsistenzen tragen meines Erachtens nicht unbedingt zur Klarheit und Verständlichkeit des Stoffes bei.
- Zu hinterfragen sind auch Schreibweisen wie $P=(x_1|y_1)$, $Q=(x_2|y_2)$. Hier ist man nicht einmal konsequent, denn man schreibt nicht $P=(x_P|y_P)$, $Q=(x_Q|y_Q)$, sondern führt Zahlenindizes ein, die hier nicht dazupassen.

Ich plädiere somit zusammenfassend dafür, die Schreibweise $P=(p_1|p_2|....|p_n)$ nach Möglichkeit durchgehend zu verwenden (insbesondere für n = 2 und n = 3).

4. Bezeichnungsvielfalt in Computerprogrammen

Da der Computer im Mathematikunterricht nicht mehr wegzudenken ist, müssen wir mit dem Problem leben, dass in einzelnen Computerprogrammen verschiedene Bezeichnungen verwendet werden. Auf unterschiedliche Achsenvoreinstellungen habe ich schon hingewiesen. Aber auch sonst gibt es viele Unterschiede. Beispielsweise werden Dezimaldarstellungen im Unterricht mit einem Beistrich angeschrieben, in den meisten Computerprogrammen wird jedoch ein Punkt verlangt. Für Punkte wird im Unterricht meist (1|3) oder (1; 3), seltener (1, 3) geschrieben (denn wenn die Koordinaten Kommazahlen sind, sind Fehler vorprogrammiert). GeoGebra hingegen verlangt (1,3) mit Komma, Derive verlangt [1,3] usw. Auch die Eingabe von Funktionen variiert von Programm zu Programm. In GeoGebra kann man $s(t) = t^2$ schreiben, in Mathe-Ass muss man dies jedoch in der Form $f(x) = x^2$ eingeben, weil es mit s und t nicht funktioniert. Man könnte die Liste dieser Beispiele noch lange fortsetzen.

Es ist also unbestreitbar, dass bei Verwendung eines Computers eine große Flexibilität in Hinblick auf Bezeichnungen erforderlich ist. Unsere Schülerinnen und Schüler müssen lernen, mit einer fast unübersehbaren Bezeichnungsvielfalt fertig zu werden. Im Grunde läuft es darauf hinaus, dass man sich vor der Verwendung eines neuen Computerprogramms (oder auch Taschenrechners) informieren muss, welche Bezeichnungen verlangt werden.

Dies sollte aber nicht als Rechtfertigung dienen, im Unterricht einen „Bezeichnungssalat“ anzubieten. Aus meiner Sicht gibt es zwei wichtige Bereiche, in denen dies kontraproduktiv wäre:

- **Aufbau einer Theorie**: Wenn ein neues Stoffgebiet erklärt werden soll, sind zu viele verschiedene Bezeichnungen (vor allem am Anfang) kontraproduktiv, weil sie eher zur Verwirrung beitragen. Einheitliche und durchgängige Bezeichnungen bieten den Lernenden hingegen eine Möglichkeit zum „Anhalten“.
- **Formulierung von Aufgaben** (insbesondere Schularbeitsaufgaben und Reifeprüfungsaufgaben): Ein „Bezeichnungssalat“ wäre hier eine unnötige Erschwernis.

Mein Vorschlag lautet also: Flexibilität hinsichtlich Bezeichnungen sollte dort erworben werden, wo sie unumgänglich ist (wie beim Arbeiten mit einem Computer) und nicht dort, wo sie eher kontraproduktiv ist (wie beim Erlernen eines neuen Stoffes oder bei der Formulierung von Prüfungsaufgaben).

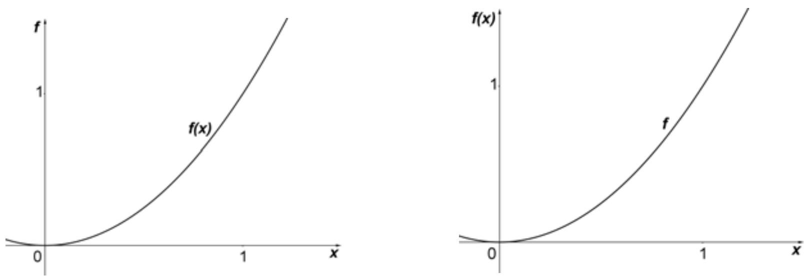
5. Funktion, Funktionswert und Graph

Seit Richard Dedekind (1831 – 1916) ist es in der Mathematik üblich, zwischen der Funktion f und dem Funktionswert f(x) zu unterscheiden. Bei reellen Funktionen ist f eine **Zuordnung** und f(x) eine **Zahl**. (Diese Zahl ist zwar nicht näher bekannt bzw. bestimmt, aber das ändert nichts daran, dass es eine Zahl ist; man spricht vom Gegenstandsaspekt einer Variablen, ausführlich dargestellt in Malle 1993.) Der Graph einer Funktion wiederum ist eine **Menge von Zahlenpaaren** (bzw. das Schaubild einer solchen Menge).

Die Begriffe „Funktion", „Funktionswert" und „Graph" müssen auseinander gehalten werden. Einige Beispiele für inkorrekte Formulierungen:

- Man kann nicht von der Funktion $f(x) = x^2$ sprechen, denn $f(x)$ ist keine Funktion, sondern eine Zahl. Eine korrekte Formulierung wäre „die Funktion f mit $f(x) = x^2$" oder „die Funktion f der Form $f(x) = x^2$". Beim Sprechen dauert dies nur eine Hundertstelsekunde länger und ist auch beim Schreiben problemlos durchzuhalten.
- Inkorrekt ist die Formulierung „Bestimme den Schnittpunkt der Graphen $f(x)$ und $g(x)$.", denn $f(x)$ und $g(x)$ sind Zahlen und keine Funktionsgraphen.
- Inkorrekt ist auch die Sprechweise „Der Punkt liegt auf der Funktion", denn ein Punkt kann nicht auf einer Zuordnung liegen. Es müsste richtig heißen: „Der Punkt liegt auf dem Graphen der Funktion".

Es kommt auch vor, dass die zweite Achse mit f, dafür aber der Graph mit f(x) beschriftet wird (wie in der Abbildung unten links). Das ist genau verkehrt. Richtigerweise muss der Graph mit f und die zweite Achse mit f(x) beschriftet werden (wie in der Abbildung unten rechts). Der Graph ist ein Bild der Funktion f. Auf der zweiten Achse werden hingegen Zahlen der Form f(x) und nicht Funktionen aufgetragen.



6. Das oft überflüssige y

Im Unterricht sind zur Angabe von Funktionen u. a. zwei Schreibweisen üblich:

$$f(x) = x^2 \quad \text{oder} \quad y = x^2$$

Manchmal findet man auch eine Hybridform aus diesen beiden Schreibweisen:

$$f\colon y = x^2$$

Wenn man sich allerdings die in der Schule gestellten Aufgaben näher ansieht, stellt man fest, dass in fast allen Fällen das y überflüssig und sogar kontraproduktiv ist, weil es weder bei der Aufgabenlösung hilft noch bei der grafischen Darstellung benötigt wird.

Es gibt nur wenige Aufgaben in der Schulmathematik, wo sich die Verwendung des y mehr oder weniger anbietet. Ein Beispiel:

Aufgabe: Man bestimme die Umkehrfunktion f^* der Funktion f mit $f(x) = x + 2$.

Lösung: $y = x + 2 \Leftrightarrow x = y - 2$. Vertauschung von x und y ergibt: $y = x - 2$. Also: $f^*(x) = x - 2$.

Bei den allermeisten Aufgaben ist die Verwendung des y jedoch überflüssig und eher störend. Auch dazu einige Beispiele:

Aufgabe 1: Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2$. Wie groß ist der Funktionswert an der Stelle 2?

Lösung: $f(2) = 2^2 = 4$

Die Schreibweise $y = 2^2 = 4$ wäre hier unangemessen, weil sie nicht zum Ausdruck bringt, um welche Funktion es geht und an welcher Stelle der Funktionswert berechnet wird.

Aufgabe 2: Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2$. Zeige: Wird das Argument x verdoppelt, so vervierfacht sich der Funktionswert $f(x)$.

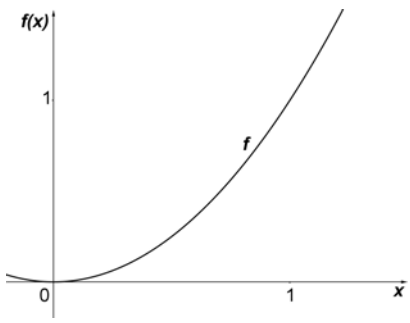
Lösung: $f(2 \cdot x) = (2 \cdot x)^2 = 4 \cdot x^2 = 4 \cdot f(x)$

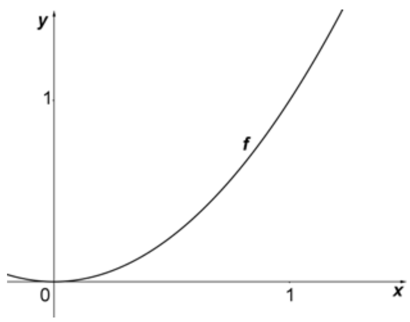
Die y-Schreibweise würde hier zu einem weniger passenden Vorgehen zwingen, etwa:

$y_{neu} = (2 \cdot x)^2 = 4 \cdot x^2 = 4 \cdot y_{alt}$

Aufgabe 3: Zeichne den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^2$.

Lösung: In diesem Fall sollte man wie in der Abbildung unten links die erste Achse mit x, die zweite Achse mit $f(x)$ und den Graphen mit f beschriften, wie vorhin ausgeführt wurde. Eine Beschriftung der zweiten Achse mit y wie in der Abbildung unten rechts wäre nicht sinnvoll, weil das y hier eine überflüssige Variable ist, die in der Angabe gar nicht vorkommt.





Die unpassende Verwendung des y kann übrigens geradezu provoziert werden, wenn schon die Aufgabenstellung schlecht formuliert wird. Beispielsweise wäre es unpassend, die Aufgabe 1 so zu formulieren: „Gegeben ist die Funktion $y = x^2$. Wie groß ist y an der Stelle 2?“. Oder die Aufgabe 2 so: „Gegeben ist die Funktion $y = x^2$. Zeige: Wird x verdoppelt, so vervierfacht sich y.“

Zusammenfassend schlage ich vor, bei der Angabe von Funktionen die Schreibweise $y = \ldots$ nach Möglichkeit durch die Schreibweise $f(x) = \ldots$ zu ersetzen. Die Hybridform f: $y = \ldots$ halte ich für entbehrlich.

Eine Randbemerkung zur Auflockerung: Dem scholastischen Philosophen Wilhelm von Ockham wird ein Prinzip zugeschrieben, welches man später als „Ockham’s Rasiermesser“ bezeichnet hat. Es besagt: „Entia non sunt multiplicanda sine necessitate“, d.h. „Die Seienden sind ohne Notwendigkeit nicht zu vermehren“. Damit wollte Wilhelm von Ockham die Schaffung und Verwendung eines überflüssigen Begriffsinstrumentariums vermeiden. Ich zitiere ihn: “Umsonst geschieht mit Hilfe einer Mehrheit, was mit weniger bewirkt werden kann.“ Auf unseren Fall angewandt: „Überflüssige Bezeichnungen sollte man vermeiden“.

7. Ableitungsfunktion

Wird y als Abkürzung für $f(x)$ aufgefasst, wird oft auch für die Ableitung y' statt $f'(x)$ geschrieben. Schülerinnen und Schüler, die die Funktionsschreibweisen wirklich verstehen wollen, können damit aber in einen Konflikt kommen. Denn da $f(x)$ eine (unbestimmte) Zahl ist, ist auch y eine (unbestimmte) Zahl. Aber eine Zahl kann man nicht differenzieren. Differenzieren kann man nur eine Funktion. Auch die Auffassung von y als Name einer konstanten Funktion hilft hier nicht weiter, denn in diesem Fall wäre y' stets gleich 0.

Damit ist auch klar, dass Schreibweisen wie etwa $[sin(x)]' = cos\,x$ genau genommen nicht korrekt sind. Es müsste richtig heißen: $sin'(x) = cos\,x$. Denn differenzieren kann man nur die Funktion *sin* und nicht die Zahl $sin(x)$.

Zusammenfassend schlage ich also vor, die Schreibweise y' nach Möglichkeit zugunsten der Schreibweise $f'(x)$ zu vermeiden und die Schreibweise $[f(x)]'$ durch $f'(x)$ zu ersetzen.

8. Termdarstellung und Funktionsgleichung

Ich plädiere für die Unterscheidung folgender Termini:

$f(x) = 2x - x^2$ …….. **Termdarstellung von *f***

$y = 2x - x^2$ ……. **Funktionsgleichung (Gleichung) von *f***

Häufig werden beide Darstellungen als Termdarstellungen von f oder beide Darstellungen als Gleichungen von f bezeichnet. Das ist an sich nicht inkorrekt, man muss sich aber bewusst sein, dass sich die beiden Darstellungen in einigen grundlegenden Punkten unterscheiden:

- In der Schreibweise $y = 2x - x^2$ kommen **zwei Zahlenvariablen** vor (nämlich x und y), aber keine Funktionsvariable (wie f). In der Schreibweise $f(x) = 2x - x^2$ kommt hingegen nur **eine Zahlenvariable** vor (nämlich x), dafür aber eine **Funktionsvariable** (nämlich f). In der Erfahrungswelt der Schülerinnen und Schüler sind aber Gleichungen eher Beziehungen zwischen Zahlenvariablen als Beziehungen zwischen Zahlen- und Funktionsvariablen. Man denke dabei an die Erfahrungen mit Gleichungen in der Unterstufe oder in der analytischen Geometrie der Oberstufe (Gleichung einer Geraden, eines Kreises, einer Ellipse usw.; in all diesen Gleichungen werden x und y und nicht x und $f(x)$ verwendet).
- Die Schreibweise $f(x) = 2x - x^2$ ergibt nur in expliziter Form einen Sinn, während die Schreibweise $y = 2x - x^2$ auch in impliziter Form angeschrieben werden kann, z.B. $x^2 + y = 2x$. Kaum jemand wird hingegen die Schreibweise $f(x) = 2x - x^2$ in der Form $x^2 + f(x) = 2x$ anschreiben.
- Die Unterscheidung von „Termdarstellung“ und „Gleichung“ wäre auch aus unterrichtspraktischen Gründen günstig, weil sie den Schülerinnen und Schülern genauer signalisiert, welche Antwort von ihnen erwartet wird. Zum Beispiel:
  - Gib eine Termdarstellung von f an. Erwartete Antwort: $f(x) = 2x + 5$
  - Gib eine Gleichung von f an. Erwartete Antwort: $y = 2x + 5$

Diese Argumente sprechen aus meiner Sicht dafür, unterschiedliche Namen für die beiden Darstellungen zu verwenden. Wie immer man sich hier entscheidet, zu beachten ist jedenfalls, dass weder eine Termdarstellung von f noch eine Gleichung von f eindeutig bestimmt ist. Eine Funktion f besitzt stets **unendlich viele Termdarstellungen** und **unendlich viele Gleichungen**. Man kann daher nicht von **der** Termdarstellung oder **der** Funktionsgleichung einer Funktion sprechen. Die Formulierungen „Ermittle **die** Termdarstellung der Funktion *f*.“ oder „Ermittle **die** Gleichung der Funktion *f*.“ sind nicht korrekt. Es muss richtig heißen: „Ermittle **eine** Termdarstellung der Funktion *f*.“ bzw. „Ermittle **eine** Gleichung der Funktion *f*.“.

Nicht korrekt ist auch die Formulierung „Betrachte die Funktion $y = x^2$“. Denn $y = x^2$ ist keine Funktion, sondern eine Gleichung. Zwar kann man jeder termdarstellbaren reellen Funktion in einer Variablen eine solche Gleichung zuordnen, das ändert aber nichts daran, dass eine Gleichung keine Funktion ist.

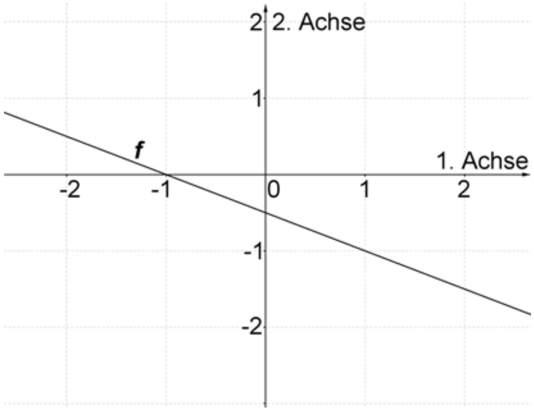
9. Punkt und Stelle

„Punkt“ und „Stelle“ sind nicht dasselbe. Ein Punkt in einem zweidimensionalen Koordinatensystem erfordert zu seiner Angabe **zwei** Koordinaten, eine Stelle hingegen liegt stets auf einer Achse und erfordert zu ihrer Angabe **eine** Koordinate. Beispielsweise gilt für die nebenstehend abgebildete Funktion f:

Nullstelle: -1

Schnittpunkt mit der 1. Achse: $(-1|0)$

Falsch wäre es, die Nullstelle in der Form $N = (-1|0)$ anzugeben.



10. Lineare Funktionen

In österreichischen Schulbüchern wird eine Funktion der Form $f(x) = k \cdot x + d$ mit $k, d \in \mathrm{IR}$ als **lineare Funktion** bezeichnet. Manchmal werden darüber hinaus die linearen Funktionen mit $d = 0$ als **homogen linear** und diejenigen mit $d \neq 0$ als **inhomogen linear** bezeichnet.

Dazu sei zunächst festgestellt, dass der Begriff der linearen Funktion in der linearen Algebra der Hochschule anders definiert wird. Dort wird eine Funktion **linear** genannt, wenn sie die folgenden beiden Bedingungen erfüllt:

(1) Additivität: $f(x+y) = f(x) + f(y)$ (2) Homogenität: $f(k \cdot x) = k \cdot f(x)$

Diese beiden Eigenschaften werden aber von einer Funktion f mit $f(x) = k \cdot x + d$ nur dann erfüllt, wenn $d = 0$ ist. Von den in der Schule als linear bezeichneten Funktionen sind also im Sinne der linearen Algebra nur die Funktionen *f* mit $f(x) = k \cdot x$ linear. Ist $d \neq 0$, so heißen diese Funktionen in der linearen Algebra **affin-linear**.

Bisher hat noch kein österreichisches Schulbuchteam den Mut gefunden, den Sprachgebrauch der Schule jenem der linearen Algebra anzupassen. Die Schultradition und der Gebrauch in der Praxis sind hier so stark, dass dies kaum durchführbar wäre. Der Ausdruck „linear“ ist auch für die Funktionen mit $d \neq 0$ nicht ganz dumm gewählt, weil der Graph einer solchen Funktion stets eine Gerade (eine gerade „Linie“) ist. Die nachfolgende Unterscheidung in „homogen linear“ und „inhomogen linear“ ist aber nicht sinnvoll, weil sie den Unterschied zur linearen Algebra in unnotwendiger Weise verstärkt. Im Sinne der linearen Algebra ist der Ausdruck „homogen linear“ ein Pleonasmus, weil eine lineare Funktion automatisch homogen ist. Der Ausdruck „inhomogen linear“ ist hingegen im Sinne der linearen Algebra ein Widerspruch, weil eine lineare Funktion nicht inhomogen sein kann. Die Ausdrücke „homogen linear“ und „inhomogen linear“ stiften also zumindest für die späteren Studierenden der Mathematik eine gewisse Verwirrung.

Diese Verwirrung kann vermieden werden, denn die Ausdrücke „homogen linear“ und „inhomogen linear“ sind in der Schule unnotwendig. Die Funktionen mit beliebigem $d \in \mathrm{IR}$ können als **lineare Funktionen**, die Funktionen mit $d = 0$ als **direkte Proportionalitätsfunktionen** bezeichnet werden (das gibt das Wesentliche einer solchen Funktion viel besser wieder als der für Schülerinnen und Schüler abstrakte und eher unverständliche Ausdruck „homogen linear“). Auch im vorläufigen Projektbericht des BIFIE kommen die Ausdrücke „homogen linear“ und „inhomogen linear“ nicht vor. Am Rande sei noch bemerkt, dass diese beiden Ausdrücke in der Hochschulliteratur so gut wie nie verwendet werden und wohl als eine Erfindung der Schulmathematik angesehen werden müssen (im Rahmen der sog. „Neuen Mathematik“ in den Sechzigerjahren des vorigen Jahrhunderts).

Mein Vorschlag lautet also: Reelle Funktionen der Form $f(x) = k \cdot x + d$ können (mit Rücksicht auf eine kaum auszulöschende Schultradition) zwar als **lineare Funktionen** bezeichnet werden, die Unterscheidung in **homogen lineare** und **inhomogen lineare** Funktionen ist aber kontraproduktiv und unnotwendig. Die Funktionen mit $d = 0$ sollten als **direkte Proportionalitätsfunktionen** bezeichnet werden.

11. Kurven versus Funktionen

Der Ausdruck „Kurvendiskussion“ ist ein typischer Ausdruck aus dem Schuljargon und sonst in der Mathematik nicht üblich. Er ist unpassend, denn es handelt sich nicht um die Untersuchung von beliebigen Kurven (wie Kreise, Spiralen etc.), sondern um die Untersuchung von Graphen reeller Funktionen. Zwar kann der Graph einer solchen Funktion als eine spezielle Kurve angesehen werden, genau genommen werden aber gar nicht Funktionsgraphen, sondern Funktionen untersucht. Man sagt ja zum Beispiel „lokale Extremstelle einer Funktion“ und nicht „lokale Extremstelle eines Funktionsgraphen“.

Es wäre aus meiner Sicht an der Zeit, den schulüblichen Ausdruck „Kurvendiskussion“ durch den korrekteren Ausdruck „Funktionsuntersuchung“ zu ersetzen.

12. Quadratische Gleichungen

Quadratische Gleichungen werden in den Schulbüchern unterschiedlich gelöst:

$$\begin{array}{lcl} x^2 - 5x + 6 = 0 & \quad\text{oder}\quad & x^2 - 5x + 6 = 0 \\ x = 2 \vee x = 3 & & x_1 = 2 \wedge x_2 = 3 \end{array}$$

Beide Vorgehensweisen lassen sich rechtfertigen. Sie unterscheiden sich aber im folgenden Punkt: Bei der linken Schreibweise liegt eine Äquivalenzumformung vor, bei der rechten nicht:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \not\Leftrightarrow x_1 = 2 \wedge x_2 = 3$$

(Man beachte, dass auf der rechten Seite die Variable x nicht mehr vorkommt, dafür aber zwei neue Symbole, nämlich x_1 und x_2 eingeführt werden.) Dieser Unterschied äußert sich schon in der Formulierung der Lösungsformel:

$$x^2 + px + q = 0 \Leftrightarrow x = -\tfrac{p}{2} + \sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q} \vee x = -\tfrac{p}{2} - \sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x^2 + px + q = 0 \text{ besitzt die Lösungen } x_1 = -\tfrac{p}{2} + \sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q} \wedge x_2 = -\tfrac{p}{2} - \sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Die erste Formulierung erfolgt in der Objektsprache bezüglich Zahlen (es wird direkt über Zahlen gesprochen). Die zweite Formulierung erfolgt in einer Metasprache bezüglich Zahlen (es wird über

Gleichungen und deren Lösungen gesprochen, d.h. es wird nicht direkt über Zahlen, sondern über Aussagen über Zahlen gesprochen). Zum Beweis der Lösungsformel wird naheliegenderweise die erste Formulierung herangezogen.

Auf der einen Seite betont man im Unterricht, dass Gleichungslösen aus Äquivalenzumformungen besteht, auf der anderen Seite verstößt man bei der zweiten Formulierung gegen dieses Prinzip. Bei linearen Gleichungen begeht man diesen Verstoß merkwürdigerweise nicht. Man schreibt ja zum Beispiel:

$$3x + 2 = 14$$
$$x = 4$$

Niemand führt hier für die Lösung eine neue Bezeichnung ein, etwa:

$$3x + 2 = 14$$
$$x_0 = 4$$

Warum ändert man die Taktik bei quadratischen Gleichungen?

Wenn eine quadratische Gleichung bloß gelöst werden soll, sind die Schreibweisen $x_1 = 2$ und $x_2 = 3$ nicht unbedingt notwendig, es genügt $x = 2 \vee x = 3$. Die Einführung der Symbole x_1 und x_2 kann aber unter Umständen sinnvoll sein, wenn mit den beiden Lösungen weitergearbeitet wird, oder wenn zu vorgegebenen Lösungen x_1 und x_2 eine quadratische Gleichung gesucht wird (Satz von Vieta).

13. Parameterdarstellung und Gleichung einer Geraden

Eine Gerade in IR^2 kann man auf zwei Arten darstellen:

- **Parameterdarstellung**: $X = P + t \cdot \vec{g}$
- **Normalvektordarstellung** (oder kurz **Gleichung**): $n_1 x + n_2 y = c$

Diese beiden Darstellungen werden oft als **Parameterform der Geradengleichung** und **parameterfreie Form der Geradengleichung** bezeichnet. Das ist eine etwas eigenartige Terminologie. Denn wenn eine Gleichung in der Form A und in der Form B vorliegen soll, dann muss es eine allgemeine Gleichung geben, die in diesen beiden Formen in Erscheinung tritt. Aber die Parameterdarstellung ist eine Gleichung in IR^2 oder IR^3 und die Normalvektordarstellung eine Gleichung in IR. Wie soll also die allgemeine Geradengleichung ausschauen? Ich weiß es nicht (bestenfalls käme A = B in Frage, aber das wäre ja sinnlos.)

Manchmal findet man für eine Parameterdarstellung einer Geraden Schreibweisen, bei denen nicht klar ist, wie sie zu verstehen sind, z. B. $\vec{X} = P + t \cdot \vec{a}$. Was soll der Pfeil über *X* bedeuten? Das Zahlenpaar *X* wird doch als Punkt und nicht als Pfeil gedeutet (eine Gerade ist eine Menge von Punkten und nicht von Pfeilen, auch nicht eine Menge von sog. „Ortsvektoren"; siehe dazu Malle 2008).

An dieser Stelle muss auch darauf hingewiesen werden, dass eine Gerade **unendlich viele Parameterdarstellungen** und **unendlich viele Gleichungen** besitzt. Formulierungen wie „Ermittle **die** Parameterdarstellung der Geraden …" bzw. „Ermittle **die** Gleichung der Geraden …" sind also nicht korrekt. Es muss richtig heißen: „Ermittle **eine** Parameterdarstellung der Geraden …" bzw. „Ermittle **eine** Gleichung der Geraden …"

Übrigens: Als Buchstaben für den Parameter reichen meiner Ansicht nach *s* und *t* aus. Griechische Buchstaben (z. B. λ) sind dafür weniger geeignet, weil diese in der Schulgeometrie meist den Winkelmaßen vorbehalten werden.

14. Standardabweichung

Die Begriffe „empirische Standardabweichung“ und „Standardabweichung einer Zufallsvariablen“ sind unterschiedlich definiert. Es ist somit didaktisch äußerst unzweckmäßig, sie mit dem gleichen Buchstaben zu bezeichnen. In der statistischen Praxis wird weitgehend das Prinzip eingehalten, Parameter einer Stichprobe mit gewöhnlichen Buchstaben, Parameter einer Grundgesamtheit (Schätzungen) jedoch mit griechischen Buchstaben zu bezeichnen. Demgemäß bietet sich an, die empirische Standardabweichung mit s und die Standardabweichung einer Zufallsvariablen mit σ zu bezeichnen (unabhängig davon, ob unter der Wurzel durch n oder $n-1$ dividiert wird, das muss dem Kontext entnommen werden). Taschenrechner oder Computerprogramme halten sich leider oft nicht daran, aber das gehört unter die vorhin besprochene Bezeichnungsvielfalt von elektronischen Hilfsmitteln. Falls eine Häufigkeitsverteilung vorliegt, sollte man das Wörtchen „empirische“ bei der empirischen Standardabweichung keinesfalls weglassen, um Verwechslungen zu vermeiden.

15. Schlussbemerkung

Damit meine Ausführungen nicht grundsätzlich missverstanden werden, sei zum Schluss noch Folgendes gesagt:

Im Unterricht sollte man zwar die Schülerinnen und Schüler nach Möglichkeit auf inkorrekte oder schlampige Bezeichnungen bzw. Sprechweisen hinweisen, sie aber nicht dafür bestrafen (z.B. durch einen Punkteabzug). Beim lockeren Reden im Unterricht kann es durchaus passieren, dass zwischen f und $f(x)$ nicht unterschieden wird, dass Punkt und Stelle verwechselt werden, dass Punkte manchmal mit und manchmal ohne Gleichheitszeichen angeschrieben werden, usw. Wir wollen nicht päpstlicher sein als der Papst. Es geht mir auch nicht in erster Linie um die Bewertung der Leistung der Lernenden, sondern um die schriftliche Formulierung der Aufgaben durch die Lehrenden (in Lehrbüchern, bei Schularbeiten und bei der Reifeprüfung). Hier sehe ich wenig Grund für Toleranz. Denn was spricht dagegen, Aufgaben korrekt (und didaktisch sinnvoll) zu formulieren?

Viele „Schlampereien“ würden bei einer Schularbeit oder selbst bei der zentralen Reifeprüfung kaum Auswirkungen auf den Erfolg haben. Eine Kandidatin oder ein Kandidat wird nicht darüber stolpern, dass von der Funktion $f(x)$ statt von der Funktion f die Rede ist, dass der Punkt $P(3|9)$ ohne Gleichheitszeichen angegeben ist oder die Achsen mit x und y statt mit x und $f(x)$ bezeichnet sind. Aber auch das darf nicht als Ausrede für inadäquate Bezeichnungen und Sprechweisen in den Aufgabenformulierungen herangezogen werden.

Literatur

Malle, G. (1993): Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg

Malle, G. (2007a): Zahlen fallen nicht vom Himmel. In: *Mathematik lehren Nr. 142 (Juni 2007), 4-11*

Malle, G. (2007b): Die Entstehung der negativen Zahlen. In: *Mathematik lehren Nr. 142 (Juni 2007), 52 – 57*

Malle, G. (2008): Ein didaktisch orientiertes Vektorkonzept. In: *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft, Heft Nr. 40 (Lehrerfortbildungstagung 2007)*

Verfasser

Univ. Prof. Dr. Günther Malle
Universität Wien
Fakultät für Mathematik
Nordbergstraße 15
1090 Wien
guenther.malle@aon.at